Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai
52 tomas, 2011, 274–279

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

žaloms: geometrinio dėsnio atvejis

Eugenija Bieliauskienė

Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: eugenija.bieliauskiene@mif.stud.vu.lt

Santrauka. Nagrinėjamas diskretaus laiko rizikos modelis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis. Vertinama baigtinio laiko bankroto tikimybė, kai žalos pasiskirstę pagal geometrinį dėsnį, kurio parametrai kinta laikui bėgant. Taip pat nagrinėjami skaitiniai pavyzdžiai.

Raktiniai žodžiai: Diskretaus laiko rizikos modelis, baigtinio laiko bankroto tikimybė, skirtingai pasiskirsčiusios žalos, geometrinis skirstinys.

1 Įvadas

Šiame darbe nagrinėjamas diskretaus laiko rizikos modelis, apimantis draudiko kapitalo elgsenos tyrimą, kai žalos yra nepriklausomos, skirtingai pasiskirsčiusios pagal geometrinį dėsnį, kurio parametrai laikui bėgant kinta. Bendru atveju diskretaus laiko rizikos modelis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis yra apibrėžiamas kaip draudimo įmonės kapitalo funkcija, priklausanti nuo pradinio kapitalo, mokamų įmokų bei įvykstančių draudžiamųjų įvykių (išmokų):

$$U(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

kur:

- $u = U(0) \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ *yra pradinis draudiko kapitalas*;
- *žalų dydžiai* $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ *yra nepriklausomi neneigiami sveikareikšmiai atsitiktiniai dydžiai su tokiomis lokaliomis tikimybėmis bei pasiskirstymo funkcija* $(j, k = 0, 1, 2, \dots)$, *nusakytomis lygybėmis*

$$h_k^{(j)} = \mathbb{P}(Z_{1+j} = k), \qquad H^{(j)}(x) = \mathbb{P}(Z_{1+j} \leqslant x) = \sum_{k=0}^{[x]} h_k^{(j)}.$$

Akivaizdu, kad lokalios tikimybės $h_k^{(j)}$ $(j, k = 0, 1, 2, \dots)$ ar pasiskirstymo funkcijų aibė $H^{(j)}(x)$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ pilnai aprašo nepriklausomų, neneigiamų sveikareikšmių atsitiktinių dydžių $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ pasiskirstymo funkcijas.

Apibrėžus žalų seką $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$, toliau konstruojama „paslinkta" žalų seka $\{Z_{i+j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ kiekvienam fiksuotam $j = 0, 1, \dots$ iš pradinės žalų sekos.

Atsitiktinių dydžių seka $Z_{1+j}, Z_{2+j}, \ldots,$ $(j = 0, 1, \ldots)$ gali būti panaudota „paslinkto" diskretaus laiko rizikos modelio sukūrimui. Jame draudiko kapitalas kiekvienu laiko momentu n yra apibrėžiamas kaip

$$U^{(j)}(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_{i+j}.$$

Kai $j = 0$, šis „paslinktas" modelis sutampa su pradžioje apibrėžtu modeliu.

Be to, nagrinėjant finansinį stabilumą, apibrėžiami keli dydžiai, apibūdinantys draudiko būklę. Kiekvienu laiko momentu t draudiko kapitalas gali likti teigiamas, arba tapti lygus nuliui, arba neigiamas. Tokia situacija, kai draudiko kapitalas nukrenta žemiau ar tampa lygus nuliui, vadinamas *nemokumu* arba *bankrotu*. Pirmasis laiko momentas, kai draudimo įmonė tampa nemoki ir daugiau nebepajėgia įvykdyti savo įsipareigojimų, vadinamas *bankroto laiku*:

$$T_u = \begin{cases} \min\{n \geqslant 1\colon U(n) \leqslant 0\}, \\ \infty, \quad \text{jei} \ \ U(n) > 0 \ \ \text{visiems} \ \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tikimybė bankrutuoti iki laiko momento $t \in \mathbb{N}$, kai pradinis draudiko kapitalas yra $u \in \mathbb{N}_0$ vadinama baigtinio laiko bankroto tikimybe, kuri apibrėžiama taip:

$$\psi(u, t) = \mathbb{P}(T_u \leqslant t).$$

Vienodai pasiskirsčiusių žalų atveju baigtinio laiko bankroto tikimybė yra išsamiai aprašyta bei gauti įvairūs sąryšiai, iš kurių paminėtinas rekursinis sąryšis, nagrinėtas De Vylder ir Goovaerts [3], Dickson ir Waters [2]. Tuo tarpu baigtinio laiko bankroto tikimybė, apibrėžta diskretaus laiko rizikos modeliui su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis, yra nagrinėjama E. Bieliauskienės, K. Blaževičiaus ir J. Šiaulio darbe (žr. [1]). Gaunamas trijų dimensijų rekursinis sąryšis visiems $j, u = 0, 1, \ldots,$ $t = 1, 2, \ldots.$

1 teorema. (*Žr. Bieliauskienė-Blaževičius-Šiaulys* [1].) *Nagrinėkime diskretaus laiko rizikos modelį su neneigiamomis nepriklausomomis skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis, apibrėžtomis aukščiau. Tada baigtinio laiko bankroto tikimybės*

$$\psi^{(j)}(u, t) = \mathbb{P}\bigl(U^{(j)}(n) \leqslant 0, \ \textit{kažkuriam}\ n \in \{1, 2, \ldots, t\}\bigr) \tag{1}$$

visiems $j = 0, 1, \ldots$ ir $u = 0, 1, \ldots,$ tenkina šias lygybes:

$$\psi^{(j)}(u, 1) = 1 - H^{(j)}(u), \tag{2}$$

$$\psi^{(j)}(u, t) = \psi^{(j)}(u, 1) + \sum_{k=0}^{u} \psi^{(j+1)}(u + 1 - k, t - 1)\ h_k^{(j)}, \quad t = 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

Naudojantis šiuo rezultatu šiame darbe bus nagrinėjamas baigtinio laiko bankroto tikimybės elgesys, kai žalos pasiskirsčiusios pagal geometrinį dėsnį, kurio parametrai kinta bėgant laikui.

2 Geometrinis skirstinys

Nagrinėkime diskretaus laiko rizikos modelį, kuriame žalos Z_{1+j}, $j = 0, 1, \dots$, yra pasiskirsčiusios pagal geometrinį dėsnį su parametru $0 < q_j < 1$, t. y. lokalios tikimybės kiekvienam $k = 0, 1, \dots$ yra

$$h_k^{(j)} = \mathbb{P}(Z_{1+j} = k) = (1 - q_j)q_j^k,$$

o pasiskirstymo tikimybės kiekvienam $u = 0, 1, \dots$ yra lygios

$$H^{(j)}(u) = \mathbb{P}(Z_{1+j} \leqslant u) = \sum_{k=0}^{u} h_k^{(j)} = 1 - q_j^{u+1}.$$

Pasiskirsčiusių pagal geometrinį dėsnį žalų vidurkis yra lygus

$$\mathbb{E}Z_{1+j} = \frac{q_j}{1 - q_j}. \tag{4}$$

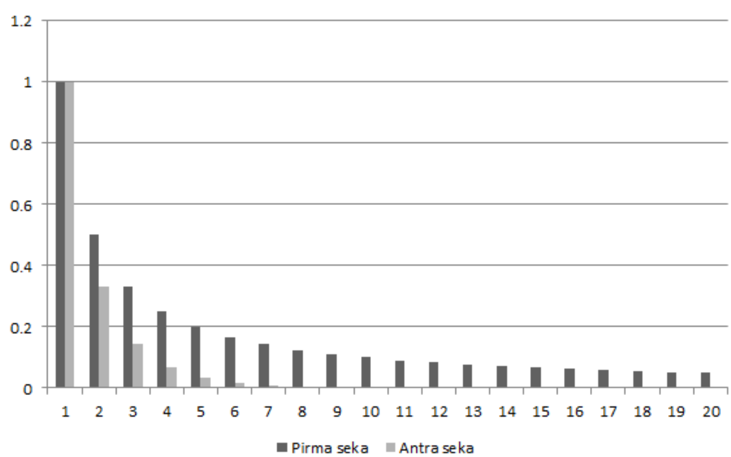
Toliau nagrinėjami du konkretūs atvejai, kai žalos yra pasiskirsčiusios pagal geometrinį dėsnį su parametrais, kintančiais bėgant laikui.

Pirmas atvejis. $q_j = \frac{1}{1+j}$**,** $j = 1, 2, \dots$

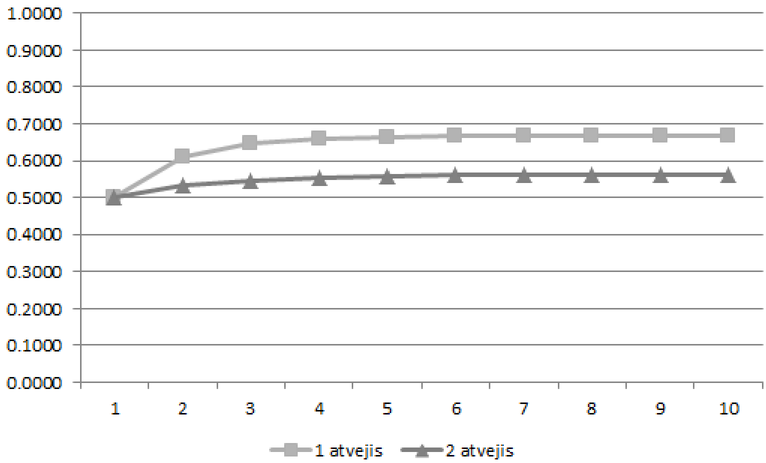
Visų pirma nagrinėjamas baigtinio laiko bankroto tikimybės elgesys, kai žalos $\{Z_{1+j}\}_{j=1,2,\dots}$ yra pasiskirsčiusios pagal geometrinį dėsnį su parametru $q_j = \frac{1}{1+j}$. Tada vidurkiai, lygūs $EZ_{1+j} = \frac{1}{j}$, vaizduojami 1 paveiksle, o baigtinio laiko bankroto tikimybės yra ($u \geqslant 0$, $t \geqslant 1$, $j \geqslant 1$):

$$\psi^{(j)}(u, 1) = 1 - H^{(j)}(u) = \frac{1}{(1 + j)^{u+1}},$$

$$\psi^{(j)}(u, t) = \frac{1}{(1 + j)^{u+1}} + \sum_{k=0}^{u} \psi^{(j+1)}(u + 1 - k, t - 1)\frac{j}{(1 + j)^{k+1}}, \quad t \geqslant 2.$$



1 pav. Žalų sekų iš pirmo ir antro atvejų vidurkiai.



2 pav. Baigtinio laiko $t = 1, 2, \ldots, 10$ bankroto tikimybės, kai pradinis kapitalas $u = 0$.

Nagrinėjant diskretaus laiko rizikos modelį dažnai yra domimasi bankroto tikimybe, kai nėra pradinio kapitalo, t. y. $u = 0$, bei atveju, kai $j = 1$, t. y. žalų seka, prasidedančia nuo pat pradžių (toliau vadinsime *baziniu atveju*). Tokiu atveju baigtinio laiko bankroto tikimybė bus lygi:

$$\psi^{(1)}(0,1) = 0.5,$$
$$\psi^{(1)}(0,t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{0} \psi^{(2)}(1-k, t-1)\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\psi^{(2)}(1, t-1), \quad t \geqslant 2.$$

Suskaičiavus baigtinio laiko bankroto tikimybes laiko momentams $t = 1, 2, 3, \ldots$ gaunamas paveikslas, kaip kinta nulinio pradinio kapitalo tikimybė ilgėjant nagrinėjamam laikotarpiui (žr. 2 pav.).

Nagrinėjant praktinius uždavinius, dažnai būna įdomu įvertinti, koks yra ryšys tarp bankroto tikimybių, kai pradinis kapitalas yra padidinamas ar sumažinamas vienu vienetu. Atlikus keletą veiksmų gaunama:

$$\begin{aligned}
\psi^{(j)}(u+1,t) =& \frac{1}{(1+j)^{u+2}} + \sum_{k=0}^{u+1} \psi^{(j+1)}(u+2-k, t-1)\frac{j}{(1+j)^{k+1}} \\
=& \frac{1}{(1+j)^{u+2}} + \frac{j}{1+j}\psi^{(j+1)}(u+2, t-1) \\
&+ \sum_{k=1}^{u+1} \psi^{(j+1)}(u+2-k, t-1)\frac{j}{(1+j)^{k+1}} \\
=& \frac{1}{(1+j)^{u+2}} + \frac{j}{1+j}\psi^{(j+1)}(u+2, t-1) \\
&+ \sum_{l=0}^{u} \psi^{(j+1)}(u+1-l, t-1)\frac{j}{(1+j)^{l}}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(1+j)^{u+2}}+\frac{j}{1+j}\psi^{(j+1)}(u+2,t-1)$$
$$+(1+j)\left(\psi^{(j)}(u,t)-\frac{1}{(1+j)^{u+1}}\right).$$

$$\psi^{(j)}(u+1,t)-(1+j)\psi^{(j)}(u,t)$$
$$=\frac{j}{1+j}\psi^{(j+1)}(u+2,t-1)+\left(\frac{1}{(1+j)^{u+2}}-\frac{1}{(1+j)^{u}}\right).$$

Baziniu atveju, kai $j=1$, ši lygybė virsta:

$$\psi^{(1)}(u+1,t)-2\psi^{(1)}(u,t)=\frac{1}{2}\psi^{(2)}(u+2,t-1)-\frac{3}{2^{u+2}}.$$

Antras atvejis. $q_j=2^{-j}$, $j=1,2,\ldots$

Analogiškai kaip ir pirmu atveju, nagrinėjama žalų, skirtingai pasiskirsčiusių pagal geometrinį dėsnį, seka $\{Z_{1+j}\}_{j=1,2,\ldots}$. Šios sekos parametras yra lygus $q_j=2^{-j}$, o žalų vidurkiai, lygūs $\mathbb{E}Z_{1+j}=\frac{1}{2^j-1}$, pateikti 1 paveiksle kartu su pirmosios sekos vidurkiais. Įsistatę parametrų išraiškas į 2, 3 formules gauname ($u\geqslant 0, t\geqslant 1$, $j\geqslant 1$):

$$\psi^{(j)}(u,1)=1-H^{(j)}(u)=2^{-j(u+1)},$$
$$\psi^{(j)}(u,t)=2^{-j(u+1)}+\sum_{k=0}^{u}\psi^{(j+1)}(u+1-k,t-1)\cdot(1-2^{-j})2^{-jk},\quad t\geqslant 2.$$

Baziniu atveju, kai $u=0$ ir $j=1$, baigtinio laiko bankroto tikimybė lygi:

$$\psi^{(j)}(0,1)=0.5,$$

$$\psi^{(1)}(0,t)=2^{-1}+\sum_{k=0}^{0}\psi^{(2)}(1-k,t-1)\cdot(1-2^{-1})2^{-k}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\psi^{(2)}(1,t-1),\quad t\geqslant 2.$$

Gautos skaitinės reikšmės pateikiamos 2 paveiksle.

3 Išvados

Straipsnyje nagrinėjamas diskretaus laiko rizikos modelis su žalomis, skirtingai pasiskirsčiusiomis pagal geometrinį dėsnį su skirtingais parametrais. Vienodai pasiskirsčiusių pagal geometrinį dėsnį žalų atveju šis modelis yra išsamiai aprašytas bei gautos išreikštinės formulės. Tuo tarpu skirtingai pasiskirsčiusių žalų atveju gaunamos rekursinės formulės yra trijų dimensijų be išreikštinės formos, kurią rasti galėtų būti atskiras uždavinys.

Be to, pateikiami keli pavyzdžiai, parodantys šio modelio savybes kintant pradiniam kapitalui per vieną vienetą, ir baigtinio laiko bankroto tikimybes, kai pradinis kapitalas lygus 0.

Literatūra

[1] K. Blaževičius, E. Bieliauskienė and J. Šiaulys. Finite time ruin probability in the inhomogeneous claim case. *Lith. Math. J.*, **50**(3):260–270, 2010.

[2] D.C.M. Dickson and R. Waters. Recursive calculation of survival probabilities. *ASTIN Bulletin*, **21**:199–221, 1991.

[3] F.E. De Vylder and M.J. Goovaerts. Recursive calculation of finite-time ruin probabilities. *Insurance: Math. and Econ.*, **7**:1–8, 1988.

SUMMARY

Ruin probability analysis in geometric inhomogeneous claims case
E. Bieliauskienė

The discrete time risk model with inhomogeneous claims is analyzed. The finite time ruin probability expression is obtained for the case when claims are distributed by geometric distribution with changing parameters. Some quantitave examples are also given.

Keywords: Discrete time risk model, finite time ruin probability, inhomogeneous claims, geometric distribution.